LISTA 1 – CAŁKA OZNACZONA RIEMANNA

1. Podać następujące przykłady

   (a) funkcji ograniczonej, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna,

   (b) dwóch funkcji ograniczonych, które nie są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[0,1]$, a których suma (iloczyn) jest funkcją całkowalną,

   (c) funkcji całkowalnej na przedziale $[0,1]$, ale niecałkowalnej na przedziale $[0,2]$,

   (d) funkcji niecałkowalnej na przedziale $[a,b]$, której wartość bezwzględna jest na tym przedziale całkowalna.

2. Oszacować całki

   (a) $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\, dx$,   (b) $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\, dx$.

3. Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić równość:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{n\pi}{2n}\Big) = \frac{2}{\pi}$,

   (b) $\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\Big) = \frac{\pi}{4}$.

4. Korzystając ze wzoru Newtona-Leibniza wyznaczyć całki:

   (a) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx$ (d) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ (g) $\int_{\frac{1}{2}}^e |\ln x|\, dx$

   (b) $\int_0^1 \frac{x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+1)} dx$ (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$ (h) $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx$

   (c) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ (f) $\int_0^2 |1-x|\, dx$ (i) $\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x) dx$

5. Wyznaczyć funkcję $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, jeśli

   (a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$,   (b) $f(x) = |x-1| + |x+1|$, $0 \le x \le 4$.

6. Uzasadnić, że spełnione są następujące równości:

   (a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 0$,   (c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5-3x^3+x}{x^4+2x^2+1}\, dx = 0$,

   (b) $\int_{-1}^1 e^{\cos x} dx = 2\int_0^1 e^{\cos x} dx$,   (d) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \cdot \sin x\, dx = 0$.

7. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi:

   (a) $y = x^2$ i $y = 2x+3$,   (b) $y = x^2$ i $x = y^2$,   (c) $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$.

8. Obliczyć pole elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

9. Obliczyć długość łuku

$$\Gamma = \Big\{ \big(x, \sqrt{1-x^2}\big),\ x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big] \Big\}.$$

10. Obliczyć długości następujących krzywych płaskich:

(a) $y = \ln x,\ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$, (b) $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1},\ x \in [a, b]$, (c) $y = \sqrt{x},\ x \in [0, 1]$.

11. Obliczyć objętość brył powstałych z obrotu podanych figur T wokół wskazanych osi

(a) $T : 1 \le x \le e,\ \ \ln^2 x \le y \le \ln x,$ oś Ox, (b) $T : 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le e^{-x},$ oś Oy.

12. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu dookoła osi Ox krzywej

(a) $y = \cosh x,\ x \in [-1, 1]$, (b) $y = \mathrm{tg} x,\ x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,